

氏 名 青影 一哉

授与した学位 博士

専攻分野の名称 理学

学位授与番号 博甲第4124号

学位授与の日付 平成22年 3月25日

学位授与の要件 自然科学研究科 先端基礎科学専攻
(学位規則第5条第1項該当)

学位論文の題目 New bases for the symmetric polynomial ring
(対称関数環の新しい基底)

論文審査委員 教授 山田 裕史 教授 吉野 雄二 教授 中村 博昭

学位論文内容の要旨

対称群とリー環の表現とその組合せ論を無限変数対称多項式環の種々の基底変換に応用し、その諸性質を調べることを目的とする。基底変換行列を調べることは、表現の情報を知るための重要な問題の一つとなっている。この論文では特に、シュア函数、シュアの Q 函数に関連する函数を扱う。

第1章では本論の主役となるシュア函数とシュアの Q 函数の解説を行う。無限変数対称多項式環の自然な基底としてシュア函数がとれる。このシュア函数は一般線形群の多項式表現の既約指標として多項式環上に実現される。一方、シュア函数はシュア-ワイル双対性により対称群の通常指標を用いて記述することができる。シュアは対称群の2枚の被覆群に対して同様の考察をした。これに対応する函数としてシュアの Q 函数が導入される。これは既約なスピン指標の情報をもつ函数として記述される。この二つの函数は無限次元リー環の表現とも関連している。すなわち、リー環のウェイトベクトルとしてこの函数は実現される。

第2章ではKdV方程式とBKP方程式の解が同じフォック空間(2-退化無限変数対称多項式環)に実現される事に注目した。この二つの函数はそれぞれ2-被約シュア函数、シュアの Q 函数で表される。この二つの函数の関係式は、Y.Youによって示された。しかしこれらは異なる次数の間の関係を与えたもので同じ次数の関係式を記述するものではなかった。そこで次数が等しい時の関係式を調べそれがStembridge係数で記述できることを示した。

第3章ではアフィンリー環 $A_1^{(1)}$ の基本表現を扱う。無限変数対称多項式環の新しい基底としてシュア函数とシュアの Q 函数の積からなるものがとれる。この基底は、 $A_1^{(1)}$ のhomogeneous twistedな実現に現れる。一方、シュア函数はhomogeneous untwistedな実現に現れる。この二つの表現が同型であることに注目し、この二つの間の基底変換を問題にした。これは第2章の基底変換の自然な拡張を与える。そこで再び、Stembridge係数のなす行列を考え、対称群の標数2のモジュラー表現に現れる分解行列と基本変形だけで移り合うことを示し、その単因子がカルタン行列のそれと一致する事を見た。また、この拡張された基底変換が整数行列で与えられることを示し、その行列式が数え上げの性質を持つことを見た。

第4章では新しいクラスの対称函数(Brauer-Schur函数)を導入する。対称群の通常表現は、シュア函数を通して多項式と関連を持つ。これによりシュア函数を考察することは対称群の表現の情報を調べることになる。しかしモジュラー表現に対してはまだ多項式への対応物がない。そこで対称群の標数 p でのモジュラー表現の情報を持つ函数をフロベニウスの式を用いて形式的に定義する。この章では、モジュラー表現への寄与を持ちえるこの函数を調べる事を目的とした。すなわち、 p -退化無限変数対称多項式環に対するBrauer-Schur函数の諸性質を調べた。また第3章での混合基底をシュアの Q 函数の代わりにBrauer-Schur函数を考えることで自然に一般化し、種々の結果を素数 p で置き換えることができることを示した。

論文審査結果の要旨

対称関数環は、対称多項式のなす空間の射影的極限として得られるもので、組合せ論のみならず、表現論やシューベルト解析などの舞台となる空間である。特にその「意味のある基底」を構成し、他の基底との関係を調べることは、これらの分野において非常に重要な問題と位置付けられる。申請者は修士時代から一貫して基底の構成問題に取り組んでおり、この主論文で満足すべき一つの解答を得た。

よく知られている自然な基底は「シューア函数」と呼ばれるものである。これはヤング図形で添字付けられ、対称群の既約指標を用いて明示的に書かれる。申請者は対称群の2枚の被覆群の既約指標を用いて書かれる「シューアのQ函数」と呼ばれる今ひとつの対称函数を使って、元々の対称関数環の基底を構成することに成功した。シューアのQ函数だけでは足りず、シューア函数との積を考えなければならぬ。その意味で新しい基底は「混合基底」と呼ばれる。実はこの混合基底は、主査である山田が以前にアフィンリー環の表現論を展開する際に有効に用いていたものに一致する。申請者はこの混合基底とシューア函数からなる基底とのあいだの変換行列を計算し、その組合せ論的な構造を明らかにした。Q函数は対称群の標数2のモジュラー表現とも関係があるが、一般に標数 p の場合にはQ函数のような「うまい函数」が存在しない。そこで見方を変えて

「ブラウアー・シューア函数」という新たな対称函数を導入し、標数 p の混合基底も構成した。これは真に新しい発想によるものであり、今後の対称関数環の理論に大きな影響を与えることは疑いない。

以上のような観点から、本論文が学位論文にふさわしいものであると判断する。